UNIVERSITE PAUL SABATIER **Juin 2009**
Licence 2ème année physique

ELECTROMAGNETISME

EXAMEN TERMINAL

Durée : 2 h

I. Cours (4 pts)

1. Donner les équations de Maxwell et les relations de passage pour le champ (**E**,**B**) entre deux milieux, dans le cas le plus général, en indiquant les unités S.I. des grandeurs physiques.

II. Energie électromagnétique dans un cylindre creux parcouru par un courant surfacique (16 pts)

Un cylindre creux de paroi infiniment mince, de rayon *a*, d'axe de symétrie z'z et de longueur infinie est parcouru par un courant surfacique $\mathbf{j}_s = j_s\,\mathbf{e}_\phi$ constituant une nappe de courant. A l'extérieur du cylindre, le champ magnétique est nul.

1. Par des considérations de symétrie, déterminer la direction du champ magnétique **B**(M) pour un point M intérieur au cylindre. **(1 pt)**

2. On s'intéresse au cas où $\mathbf{j}_s$ est stationnaire.
   a) Calculer le champ magnétique $\mathbf{B}_0$(M) pour un point M intérieur au cylindre et proche de la paroi. On utilisera la relation de passage à travers la nappe de courant. **(2 pts)**
   b) En appliquant le théorème d'Ampère à un contour rectangulaire fermé ABCD que l'on précisera clairement sur un schéma, calculer $\mathbf{B}_0$(M') quel que soit le point M' intérieur au cylindre. **(2 pts)**

On considère dans toute la suite que j_s est dépendant du temps selon $j_s(t) = J_S \cos \omega t$ avec ω non nul et $\mathbf{j}_s(t) = j_s(t)\,\mathbf{e}_\phi$.

3. Justifier la nouvelle expression du champ magnétique $\mathbf{B}_0(\mathbf{r},t) = \mu_0 J_S \cos \omega t\, \mathbf{e}_z$. **(1 pt)**
4. Calculer le champ électrique $\mathbf{E}_1(\mathbf{r},t)$ résultant de $\mathbf{B}_0(\mathbf{r},t)$ par la relation de Maxwell-Faraday. Le champ $\mathbf{E}_1(\mathbf{r},t)$ est-il invariant par translation selon z'z ? pourquoi ? *On admettra* par ailleurs que $\mathbf{E}_1(\mathbf{r},t)$ est suivant $\mathbf{e}\phi$ et s'annule sur l'axe z'z . Le champ électrique$\mathbf{E}_1(\mathbf{r},t)$ sera donné en fonction de μ_0, J_S, ω, ρ et t. **(3 pts)**

5. Calculer le champ $\mathbf{B}_2(\mathbf{r},t)$ résultant de $\mathbf{E}_1(\mathbf{r},t)$ par la relation de Maxwell-Ampère. Le résultat sera exprimé en fonction de $\mathbf{B}_0(\mathbf{r},t)$, ρ, ω, et c. **(2 pts)**

6. Calcul des énergies électrique et magnétique. **(4 pts)**
   a) Calculer la densité d'énergie magnétique $e_m(t)$ due à $\mathbf{B}_0(\mathbf{r},t)$ seul, puis sa valeur moyenne sur une période $\langle e_m \rangle_T$. Ces résultats seront exprimés en fonction de μ_0 et J_S.

…/…

b) Calculer la densité d'énergie électrique $e_e(t)$ due à $\mathbf{E}_1(\mathbf{r},t)$, puis sa valeur moyenne sur une période $<e_e>_T$. Ces résultats seront exprimés en fonction de μ_0 , J_S, ω, et ρ.

c) Calculer l'énergie magnétique $< \xi_m >_T$ due à $\mathbf{B}_0(\mathbf{r},t)$, par unité de longueur selon z'z, due à $\mathbf{B}_0(\mathbf{r},t)$.

d) Calculer l'énergie électrique $< \xi_e >_T$ due à $\mathbf{E}_1(\mathbf{r},t)$, par unité de longueur selon z'z, due à $\mathbf{E}_1(\mathbf{r},t)$.

7. Exprimer le rapport des normes des vecteurs $\mathbf{B}_2(\rho = a, t)$ et $\mathbf{B}_0(\rho = a, t)$ et le rapport des énergies $< \xi_e >_T$ et $< \xi_m >_T$ en fonction a, ω, et c. **(0,5 pt)**

Application Numérique : On donne la fréquence d'oscillation $f = 10^{10}$ Hz, avec a = 1 cm, $c = 3\ 10^8$ m/s. Calculer numériquement les deux rapports précédents. **(0,5 pt)**

On donne l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\mathrm{rot}\,\vec{V} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right]\vec{e}_\rho + \left[\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho}\right]\vec{e}_\varphi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi}\right]\vec{e}_z$$